Modul Geometrie 22. Oktober 2008

Wintersemester 2008-2009

Schmale

Aufgaben

(4) Seien K ein Körper, $\mathsf{char}(K) \neq 2$ und $a, b, c \in K^n$, $n \geq 1$, drei "Punkte". Zu einer Teilmenge M von K^n sei

$$M_1 := M^{\vee} := \bigcup_{p,q \in M, p \neq q} p \vee q \quad \text{und} \quad M_2 := {M_1}^{\vee} \ .$$

Zeigen Sie für $M = \{a, b, c\}$:

M_2 ist ein affiner Unterraum.[(1)]

(5) Beweisen Sie den Teil „(c)⇒(a)“ von Satz 1 in § 1 unter der Voraussetzung $|K| \geq 3$. Eine Anleitung dazu wurde bereits in der Vorlesung gegeben.

(6) **(a)** Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)} \in K^n$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. Dabei sei

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\Big) \neq 0 \ .$$

Zeigen Sie:

Es gibt genau ein $g \in K^n$ derart, dass $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(g - a^{(k)}) = 0$.

$g = g\big((a^{(1)} \ ; \ \alpha_1), \ldots, (a^{(n)} \ ; \ \alpha_n)\big)$ heißt *Baryzentrum* oder *Massenzentrum* der so genannten *Punktmassen* $(a^{(k)} \ ; \ \alpha_k)$.

(b) Seien Y, Y' nicht-leere affine Unterräume von K^n, K ein Körper und $f : Y \to Y'$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

f ist genau dann affin, wenn f Baryzentren von Punkten in Y in die entsprechenden Baryzentren der Bildpunkte in Y' abbildet. [(2)]

....

(1) Als Anleitung kann z.B. eine kurze Lektüre in dem Buch „Analytische Geometrie“ von Gerd Fischer im Abschnitt 1.1 dienen.

(2) Eine Anleitung finden Sie bei Bedarf z.B. in dem bereits in der Vorlesung erwähnten Buch „Geometry“ von Michèle Audin, Seite 17. Es steht in meinem Handapparat.